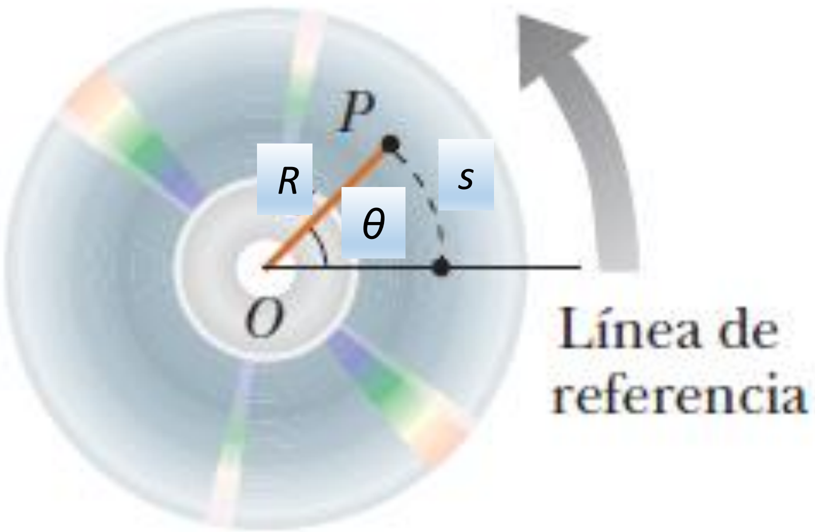
Dinámica del Cuerpo Rígido

Apuntes y Ejemplos

Repaso sobre movimiento circular

Ángulo, arco, velocidad angular y tangencial, aceleración angular y tangencial



Variables angulares		Variables lineales		Relaciones
θ	[rad]	s	[m]	$s = R\theta$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	[rad/s]	$v = \dfrac{ds}{dt}$	[m/s]	$v = R\omega$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	[rad/s^2]	$a_t = \dfrac{dv}{dt}$	[m/s^2]	$a_t = R\alpha$

Cinemática del Movimiento Circular con Aceleración Constante

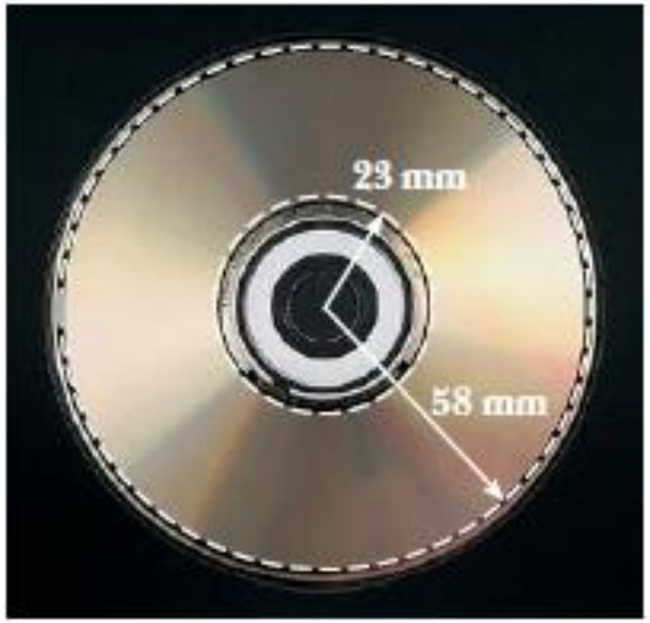
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

Repaso sobre movimiento circular

Ejemplo 1. (De Serway-Jewett, pág 275) En un disco compacto, la información de audio se almacena digitalmente en una serie de depresiones (pits) y áreas planas en la superficie del disco. Las alternaciones entre depresiones y áreas planas sobre la superficie representan unos y ceros binarios a leer por el reproductor de CD y convertir de regreso en ondas sonoras. Las depresiones y áreas planas se detectan mediante un sistema que consiste de un láser y lentes. La longitud de una cadena de unos y ceros que representa una porción de información es la misma en cualquier parte del disco, ya sea que la información este cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior. De modo que, para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema láser–lente en el mismo intervalo de tiempo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la posición del lente debe ser constante. Por consiguiente la rapidez angular debe variar a medida que el sistema láser–lente se mueve radialmente a lo largo del disco. En un reproductor de CD común, la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema láser–lente es 1.3 m/s.

Encuentre la rapidez angular del disco en rpm cuando la información se lee desde la pista más interna (r = 23 mm) y la pista más externa (r = 58 mm).



Rta:

$$\omega_{int} = \frac{v}{R_{int}} = \frac{1.3\ m/s}{0.023\ m} = 56.52\ rad/s$$

$$\omega_{int} = \frac{56.52\ rad}{1\ s} = \frac{\frac{56.52}{2\pi}\ rev}{\frac{1}{60}\ min} = 539.74\ rpm$$

$$\omega_{ext} = \frac{v}{R_{int}} = \frac{1.3\ m/s}{0.058\ m} = 22.41\ rad/s$$

$$\omega_{ext} = \frac{22.41\ rad}{1\ s} = \frac{\frac{22.41}{2\pi}\ rev}{\frac{1}{60}\ min} = 214\ rpm$$

El máximo tiempo de reproducción de un disco de música estándar es 74 min y 33 s. ¿Cuántas revoluciones realiza el disco del problema anterior durante dicho tiempo? (Suponga que desacelera uniformemente desde la pista más interna hacia la más externa)

Rta:

$$\omega_0 = \omega(0) = \omega_{int} = 56.52\, rad/s$$

$$\omega_f = \omega(74\,\text{min}\,33\,s) = \omega(4473\,s) = \omega_{ext} = 22.41\, rad/s$$

Usemos las ecuaciones del MCUV

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \longrightarrow \omega(4473\,s) = \omega(0) + \alpha \cdot 4473\,s \longrightarrow 22.41\frac{rad}{s} = 56.52\frac{rad}{s}` + \alpha \cdot 4473\,s$$

$$\downarrow$$

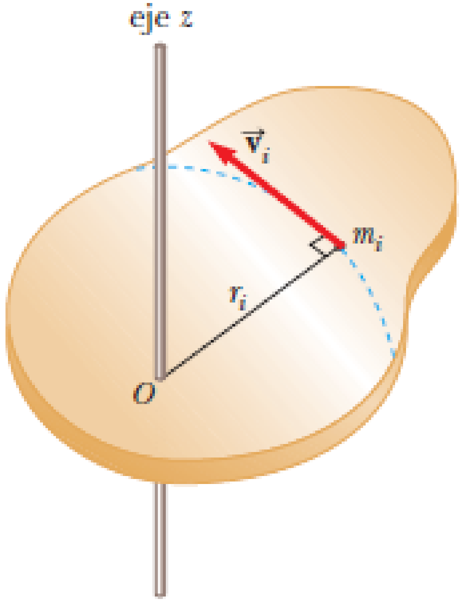
$$\alpha = -0.0076\, rad/s^2$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \longrightarrow \theta(4473\,s) = 0 + 56.52\frac{rad}{s} \cdot 4473\,s + \frac{1}{2}\left(-0.0076\frac{rad}{s^2}\right)(4473\,s)^2$$

$$\downarrow$$

$$\theta(4473\,s) = 176526.95\, rad = 28095\, rev$$

Energía Cinética Rotacional – Momento de Inercia



La energía cinética de una partícula del sólido, de masa m_i a una distancia r_i del eje de rotación es

$$K_{rot,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Entonces la energía cinética de rotación del sólido completo será

$$K_{rot} = \sum_i K_{rot,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

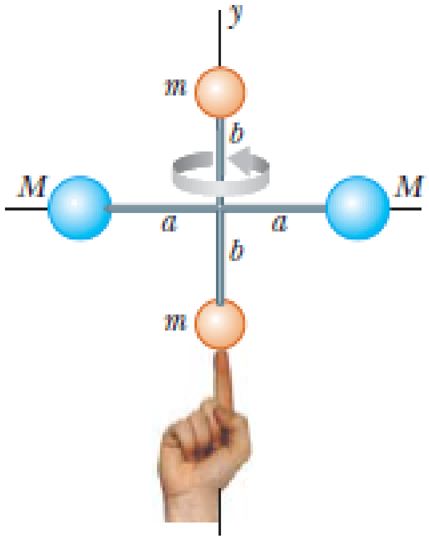
donde ***I = Momento de Inercia***

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

El momento de inercia depende de la masa y la forma del sólido, y del eje alrededor del cuál ocurre la rotación

Ejemplo 2. Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano *xy*. Los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

(a) Si el sistema da vueltas en torno al eje *y* con una rapidez angular ω, encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.



Rta:

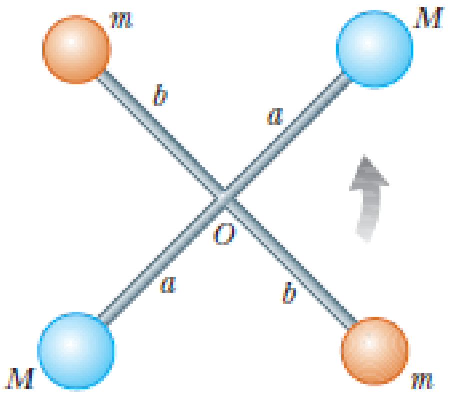
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

r_i es la distancia desde la *i*-ésima partícula al eje de rotación.
En este caso, las dos partículas más pequeñas, de masa *m*, están *sobre* el eje de rotación

Entonces
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + m \cdot 0^2 + m \cdot 0^2 = 2Ma^2$$

Y la energía cinética de rotación será
$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

(b) Ídem suponiendo que la rotación ocurre ahora alrededor de un eje *z* que pasa por el punto *O* y es perpendicular al plano de las barras



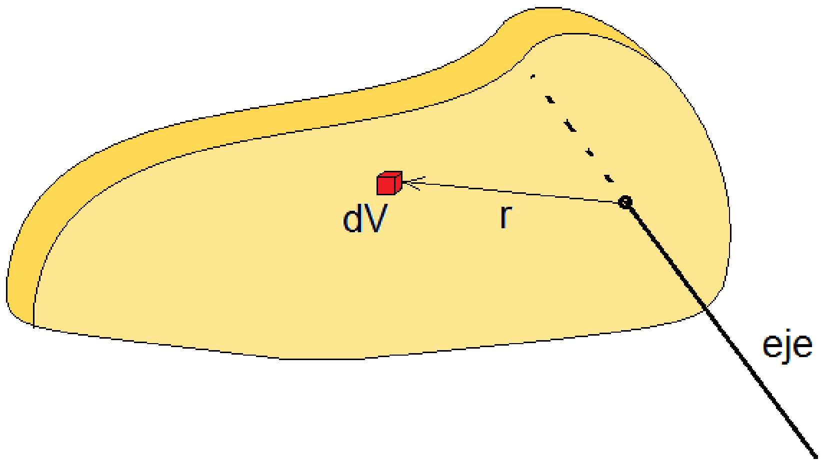
Rta: En este caso:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2(Ma^2 + mb^2)$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

Momento de Inercia de Objetos Continuos

Se considera un objeto extenso y se lo divide en elementos diferenciales de volumen *dV*:



Cada elemento diferencial de volumen *dV* posee una masa *dm*

La relación entre *dV* y *dm* está dada por la relación volumétrica de masa *ρ* (masa por unidad de volumen):

$$\rho = \frac{dm}{dV} \longrightarrow dm = \rho\, dV$$

Para calcular el momento de inercia debemos transformar la suma (sobre todas las partículas) en una integral (sobre todo el volumen del cuerpo):

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \longrightarrow \boxed{I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV}$$

Si el cuerpo es homogéneo (densidad de masa constante) $\longrightarrow$ $\rho = cte. = \dfrac{M}{V}$

y puedo sacar la densidad de la integral: $I = \rho \int r^2\, dV$

Momento de Inercia en Sólidos Continuos - Densidad de masa

Densidades de Masa:

1 - Densidad Volumétrica de Masa:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Masa por unidad de volumen, [kg/m^3]

Para un sólido homogéneo: $\rho = \frac{M}{V}$

Masa total

Volumen total

2 - Densidad Superficial de Masa:

$$\sigma = \frac{dm}{dS}$$

Masa por unidad de superficie, [kg/m^2]

Para un sólido homogéneo: $\sigma = \frac{M}{S}$

Masa total

Superficie total

3 - Densidades Lineal de Masa:

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

Masa por unidad de longitud, [kg/m^3]

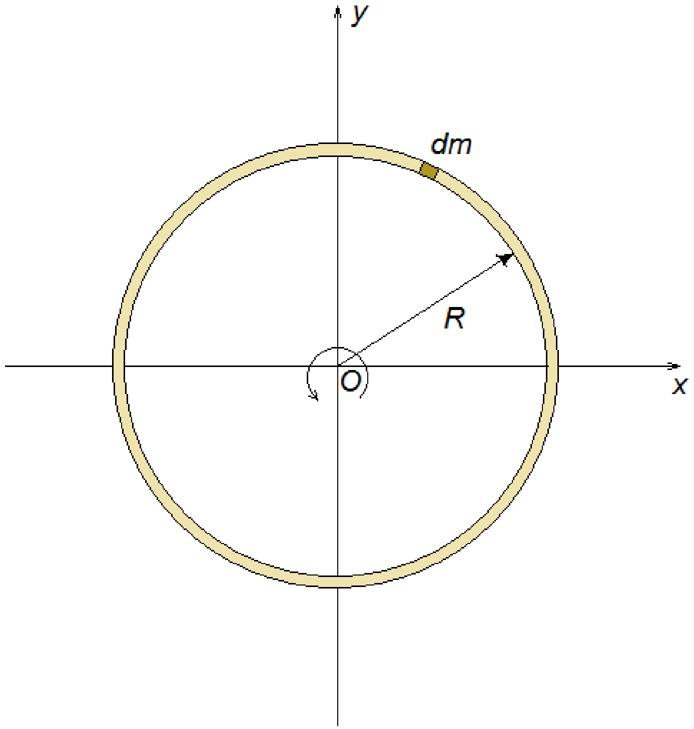
Para un sólido homogéneo: $\lambda = \frac{M}{L}$

Masa total

Longitud total

Momento de Inercia en Sólidos Continuos

Ejemplo 3. Hallar el momento de inercia de un aro uniforme de masa total *M* y radio *R* en torno a un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por su centro *O*.



Rta:

$$I = \int_{anillo} r^2 dm$$

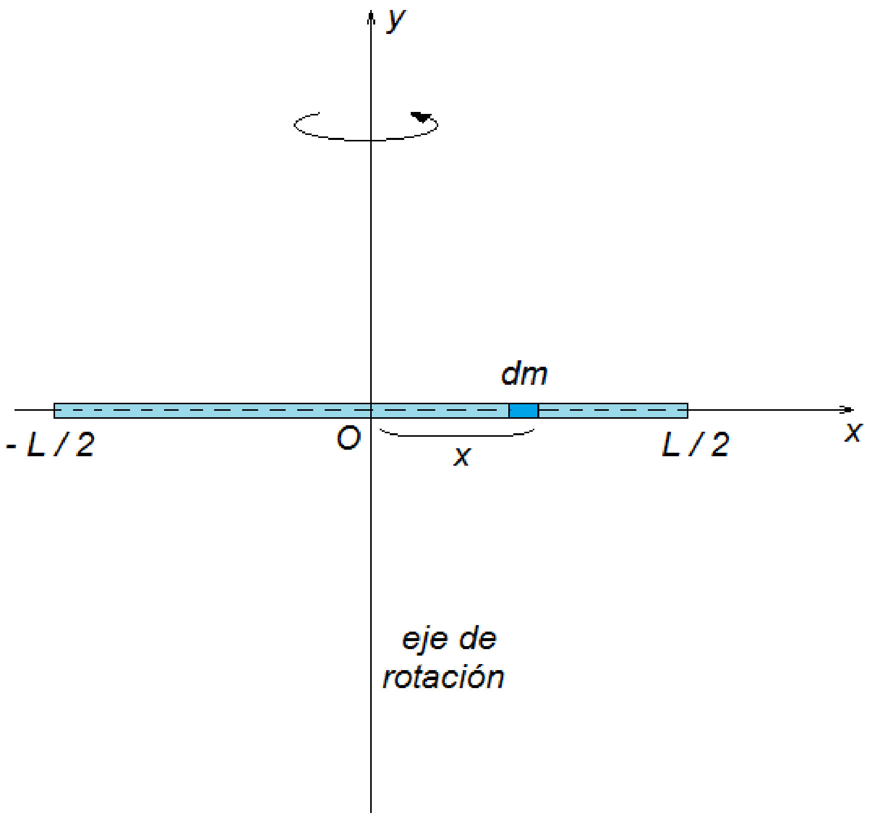
r es la distancia al eje de giro, que pasa por *O* y es perpendicular a la página. Como $r = R = cte$, puedo sacarlo de la integral

$$\rightarrow \quad I = R^2 \int_{anillo} dm = R^2 M$$

$$\rightarrow \quad I = MR^2$$

Momento de Inercia en Sólidos Continuos

Ejemplo 4: Hallar el momento de inercia de una barra rígida uniforme de masa total *M* y longitud *L* en torno a un eje perpendicular a la barra y que pasa por su centro de masa.



Rta:

$$I = \int_{barra} r^2 dm$$

La distancia r al punto *O* está dada simplemente por el valor de la coordenada *x*.

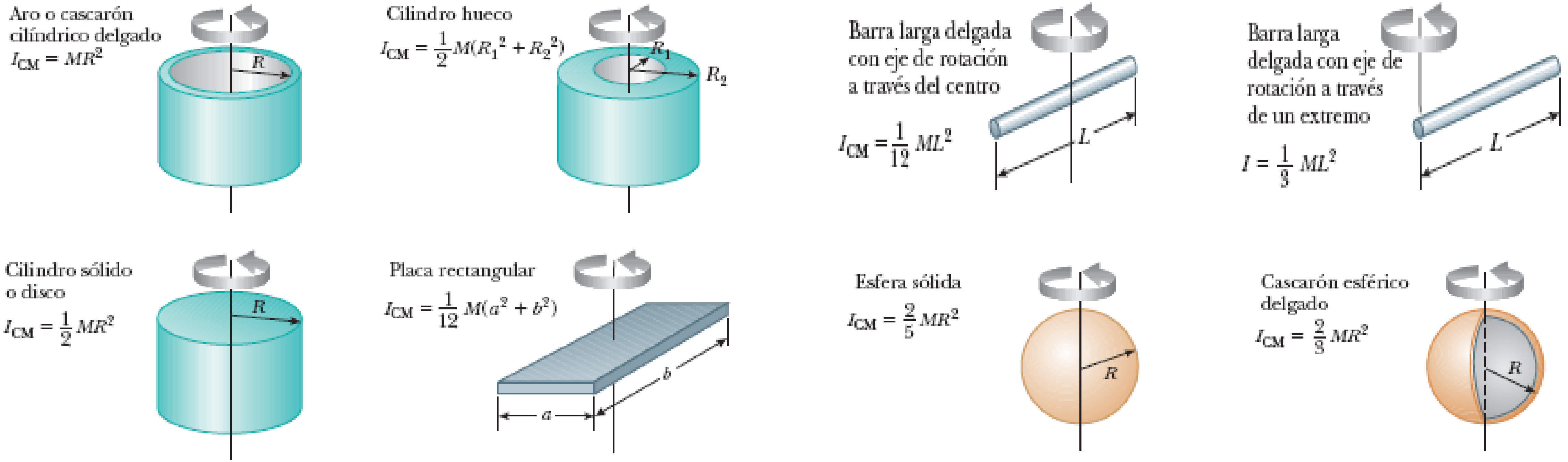
Conviene reemplazar $dm = \lambda\, dx$, donde, siendo la barra uniforme, $\lambda = \frac{M}{L} = cte.$

$$I = \int_{barra} x^2 \lambda\, dx = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \lambda\left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right)$$

$$I = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{M}{L}\frac{L^3}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Momento de Inercia en Sólidos Continuos



Torque (Torca, Momento de Torsión)

Se define para una fuerza aplicada en un punto de un cuerpo rígido, con respecto al eje de giro:

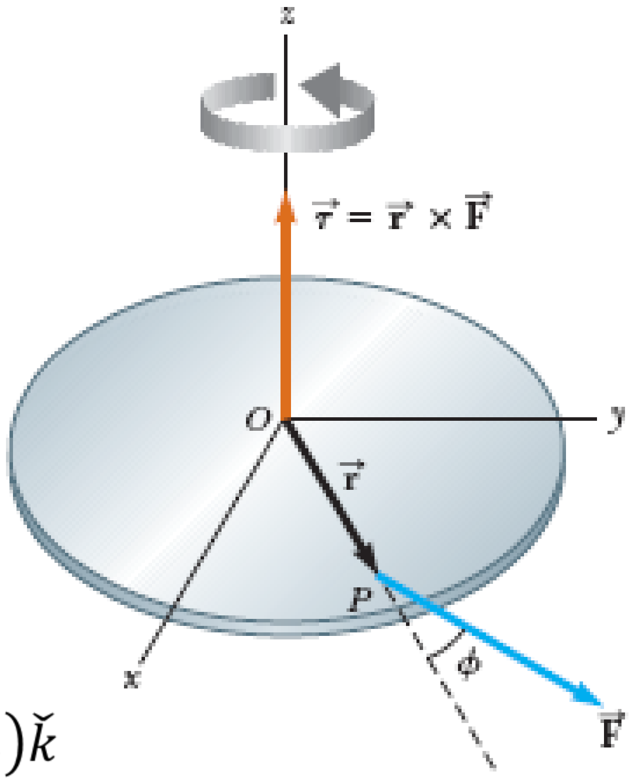
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Torque

Vector con origen en el eje de rotación, perpendicular al mismo, y con final en el punto de aplicación de la fuerza

Producto Vectorial !

Fuerza



Estrictamente hablando…

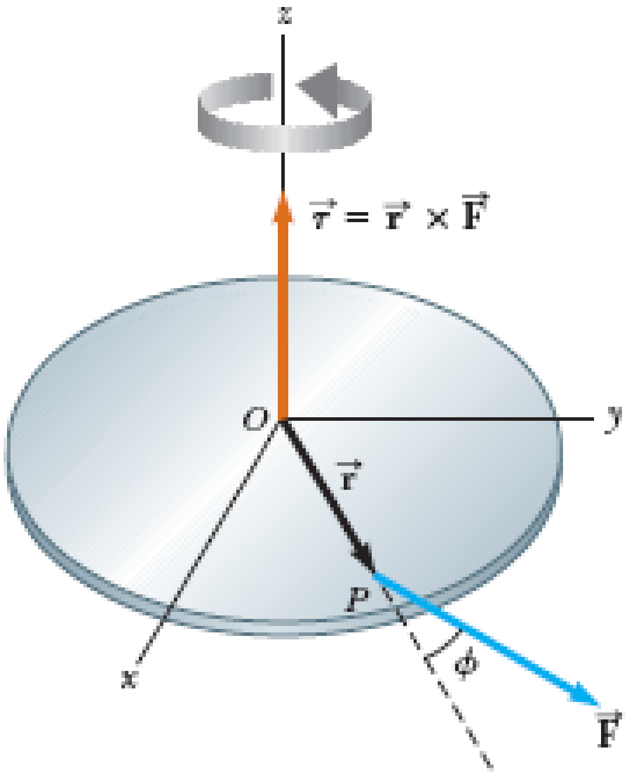
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\check{\imath} + (zF_x - xF_z)\check{\jmath} + (xF_y - yF_x)\check{k}$$

Por suerte, en muchas situaciones prácticas, el cálculo del producto vectorial se simplifica aplicando sus propiedades …

Torque (Torca, Momento de Torsión)

Por suerte, en muchas situaciones prácticas, el cálculo del producto vectorial se simplifica aplicando sus propiedades …

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



PROPIEDAD 1) La **dirección** de $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$

PROPIEDAD 2) El **sentido** de $\vec{\tau}$ se determina aplicando la ley de la mano derecha (o del tirabuzón)

PROPIEDAD 3) El **módulo** de $\vec{\tau}$ está dado por:

$$\boxed{\tau = |\vec{\tau}| = r\ F\ sen\theta}$$

$r = |\vec{r}|$

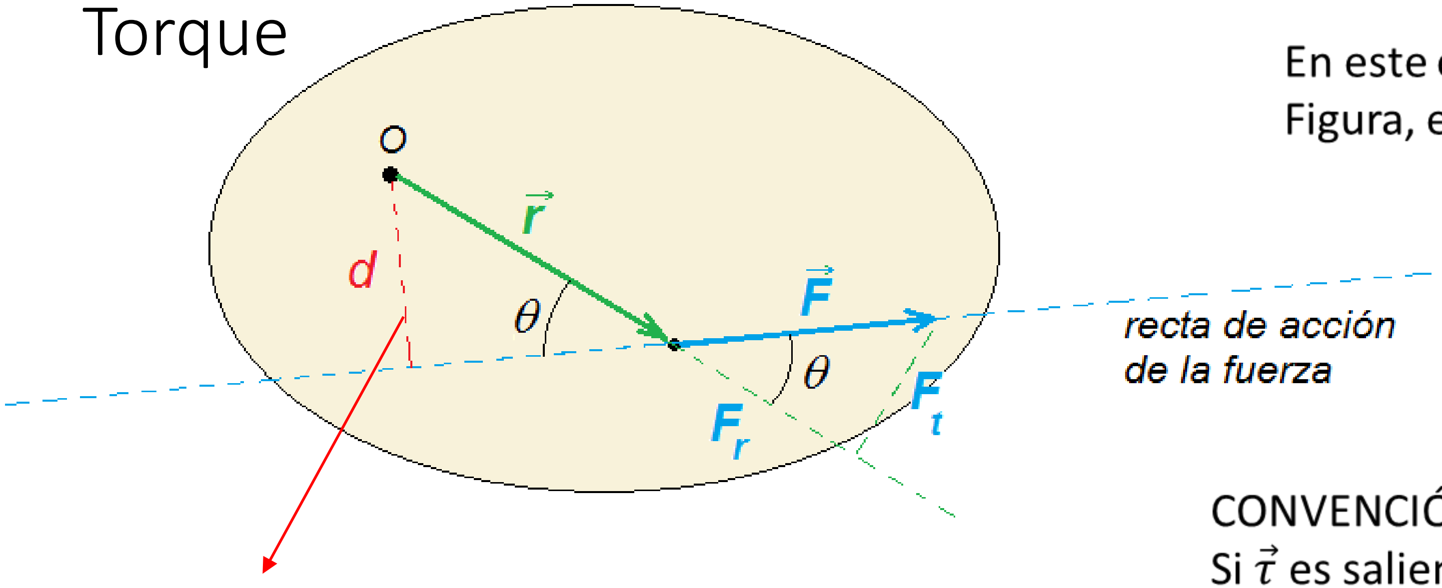
$F = |\vec{F}|$

Ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$

A la cantidad $d = r\ sen\theta$ se le suele llamar *brazo de palanca* de $\vec{F}$.

Es la distancia perpendicular entre el eje de rotación y la línea de acción de la fuerza. Ejemplo…

Torque



$d = r\ sen\theta$

En este ejemplo, dado que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en el plano de la Figura, el torque $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano de la Figura.

Por regla de la mano derecha, el sentido de $\vec{\tau}$ debe estar *saliendo* del plano de la Figura (hacia el observador)

CONVENCIÓN DE SIGNOS:
Si $\vec{\tau}$ es saliente de la página = giro antihorario = signo positivo
Si $\vec{\tau}$ es entrante en la página = giro horario = signo negativo

Si conociéramos los módulos de $\vec{r}$ y $\vec{F}$, y el ángulo θ que forman entre sí, podríamos calcular el módulo del torque como

$$\tau = r\ F\ sen\theta$$

Alternativamente, si conociéramos el módulo de $\vec{F}$ y el brazo de palanca d, podríamos calcular el módulo del torque como

$$\tau = F(r\ sen\theta) = F\ d$$

Otra forma de pensarlo es observar que solamente la componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$ contribuye al torque:

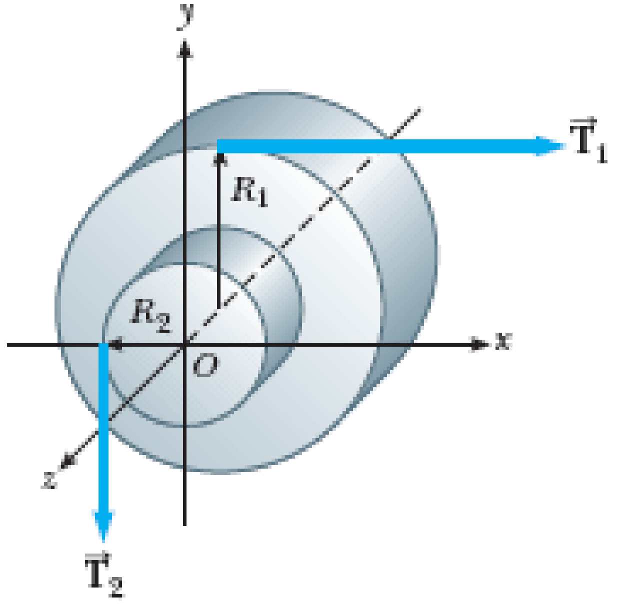
$$\tau = (F\ sen\theta)r = F_t\ r$$

donde F_t es la componente de la fuerza tangencial al giro (Figura)

Torque - Ejemplo

Ejemplo 5. (de Serway-Jewett, pág. 283)

Un cilindro de una pieza tiene la forma que se muestra en la figura, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de girar en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una soga enrollada en torno al tambor externo, que tiene radio R_1, ejerce una fuerza $\vec{T}_1$ hacia la derecha sobre el cilindro. Una soga enrollada en torno a la parte central, que tiene radio R_2, ejerce una fuerza $\vec{T}_2$ hacia abajo sobre el cilindro. Si $T_1 = 5N$; $T_2 = 6N$; $R_1 = 1\ m$; $R_2 = 0.5\ m$. ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa en el cilindro en torno al eje de rotación (que es el eje *z* en la figura)?



Rta:

El torque producido por $\vec{T}_1$ será: $\tau_1 = R_1\ T_1\ sen90º = R_1\ T_1 = 5\ Nm$ (hacia adentro de la página)

El torque producido por $\vec{T}_2$ será: $\tau_2 = R_2\ T_2\ sen90º = R_2\ T_2 = 3\ Nm$ (hacia afuera de la página)

Utilizando la convención de signos, el torque neto será: $\tau_{neto} = -5\ Nm + 3\ Nm = -2\ Nm$

El torque neto producirá giro en el sentido horario

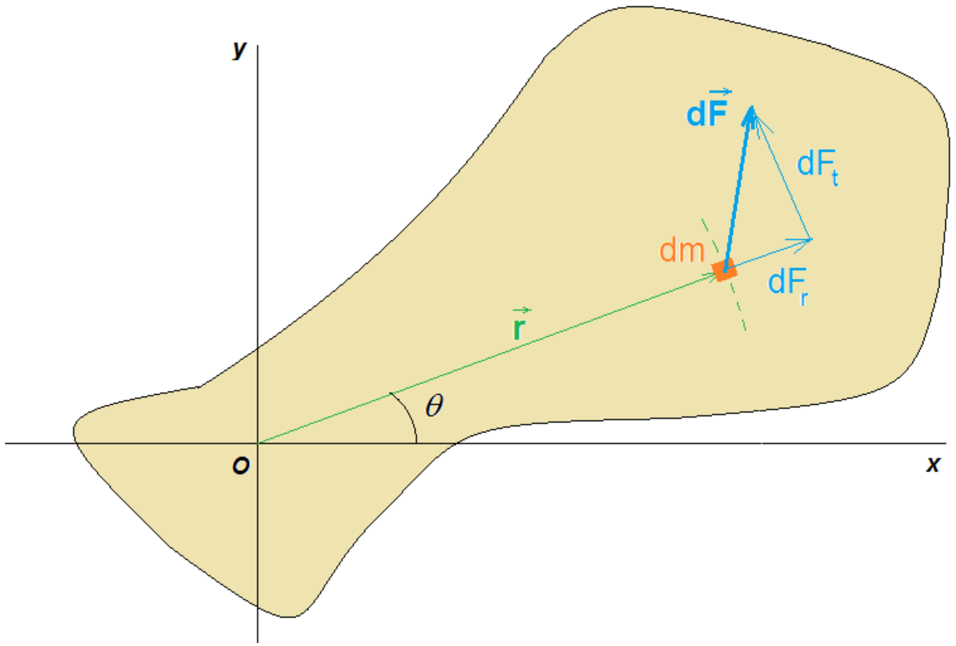
Relación entre Torque y Aceleración Angular – Segunda Ley de Newton para la rotación

Así como la segunda Ley de Newton establece que, para el movimiento de traslación de un cuerpo:

$$\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

existe un equivalente rotacional

$$\tau_{neto} = \sum \tau = I\alpha$$



Demostración:

Consideremos un elemento diferencial de masa dm sobre el que se aplica una fuerza infinitesimal $d\vec{F}$

La componente tangencial de la fuerza producirá una aceleración tangencial: $dF_t = dm \cdot a_t = dm \cdot \alpha \cdot r$

A su vez, la componente tangencial de la fuerza está asociada con el torque: $d\tau = r \cdot dF \cdot sen\theta = r \cdot dF_t$

Combinando ambas: $d\tau = r \cdot dF_t = \alpha \cdot r^2 \cdot dm$

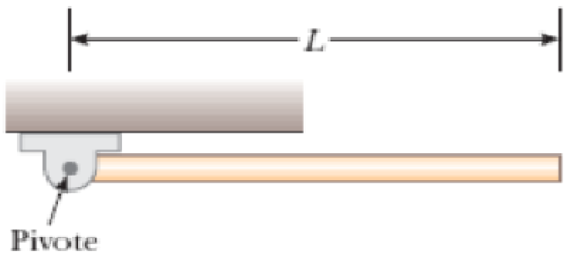
Integrando a ambos lados: $\int_{cuerpo} d\tau = \int_{cuerpo} \alpha \cdot r^2 \cdot dm =$

Pero α vale lo mismo para todos los puntos del cuerpo: $\tau_{neto} = \int_{cuerpo} d\tau = \alpha \int_{cuerpo} r^2 dm = \alpha I$

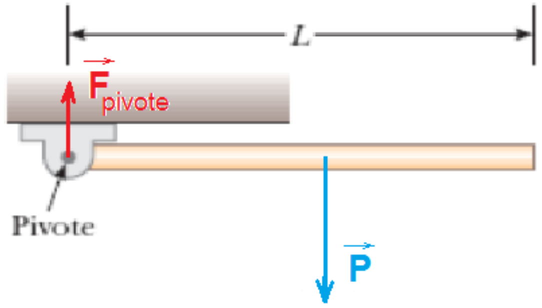
$$\boxed{\tau_{neto} = \sum \tau = I\alpha}$$

Segunda Ley de Newton para la Rotación - Ejemplos

Ejemplo 6. Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M* unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. (a) ¿Cuál es la aceleración angular inicial de la barra?



Rta.: Para identificar los torques sobre la barra, debemos identificar primero las fuerzas sobre la barra. ¿Cuáles son?. El peso, que consideramos aplicado en el CM y, eventualmente, la fuerza que pueda ejercer el pivote, que actúa sobre el extremo:



El eje de giro es alrededor del pivote, así que $\vec{F}_{pivote}$ no ejerce torque sobre la barra. El peso, en cambio, sí lo hace. Entonces planteamos la 2º Ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau = \tau_{Peso} = P \cdot \frac{L}{2} \cdot sen90º = \frac{1}{2} MgL = I\alpha$$

El momento de inercia de una barra homogénea alrededor de uno de sus extremos es (ver tabla): $I = \frac{1}{3} ML^2$

Reemplazando y despejando:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} MgL}{\frac{1}{3} ML^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

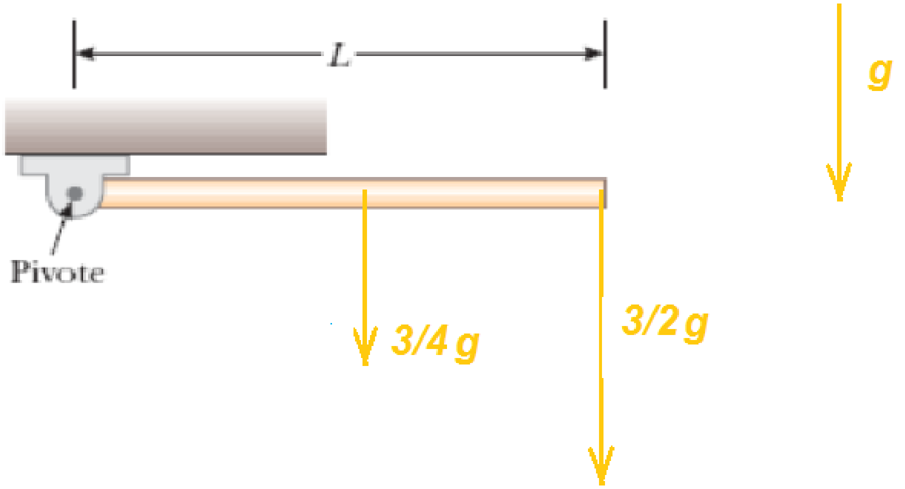
(sigue)

Segunda Ley de Newton para la Rotación - Ejemplos

Ejemplo 6 (b) ¿Cuál será la aceleración lineal del extremo libre? ¿y la del centro de la barra?

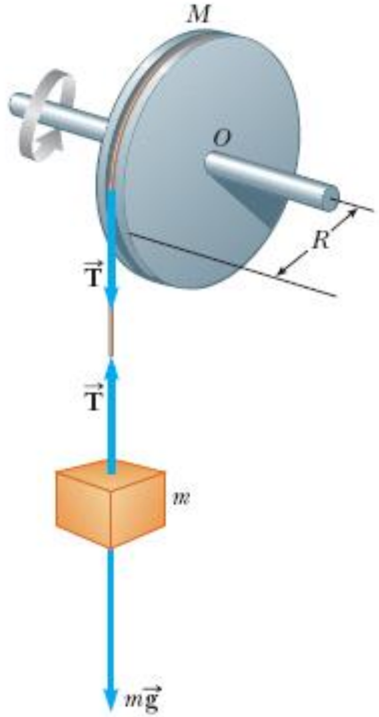
Rta: Para el extremo libre: $a_t = \alpha \cdot L = \frac{3}{2} g$

Para un punto en el centro de la barra $a_t = \alpha \cdot \frac{L}{2} = \frac{3}{4} g$



¿Y si se coloca una moneda en el extremo de la barra y después se libera la barra? ¿La moneda permanecerá en contacto con la barra?

Segunda Ley de Newton para la Rotación – Ejemplos



Ejemplo 7. Una rueda de radio *R*, masa *M* y momento de inercia *I* se monta sobre un eje horizontal sin fricción. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa *m*. Calcule la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del objeto y la tensión en la cuerda.

Rta: En los problemas como éste, donde se combina movimiento de traslación (del cuerpo suspendido), con movimiento de rotación (de la polea), se debe aplicar la segunda Ley de Newton en sus formas traslacional y rotacional.

Para el cuerpo suspendido: $\sum F_y$: $mg - T = ma$

Para la rueda: $\sum \tau$: $TR = I\alpha = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{I}\underbrace{\frac{a}{R}}_{\alpha} = \frac{1}{2}MRa$

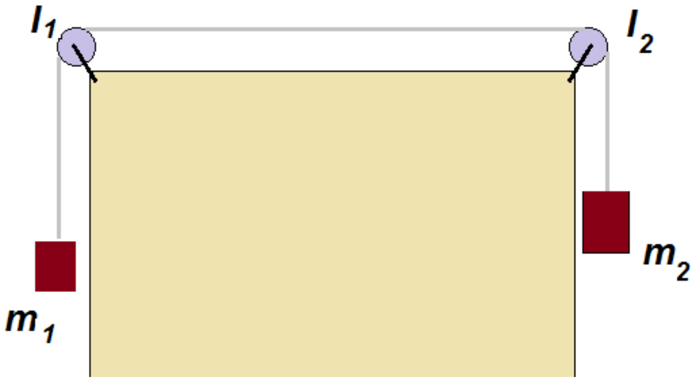
Combinando ambas ecuaciones, podemos averiguar las dos incógnitas:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}; \quad T = \frac{1}{2}\left(\frac{mMg}{m + \frac{1}{2}M}\right) = \frac{mMg}{2m + M}$$

Y la aceleración angular será: $$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{mg}{mR + \frac{1}{2}MR}$$

Segunda Ley de Newton para la Rotación – Ejemplos

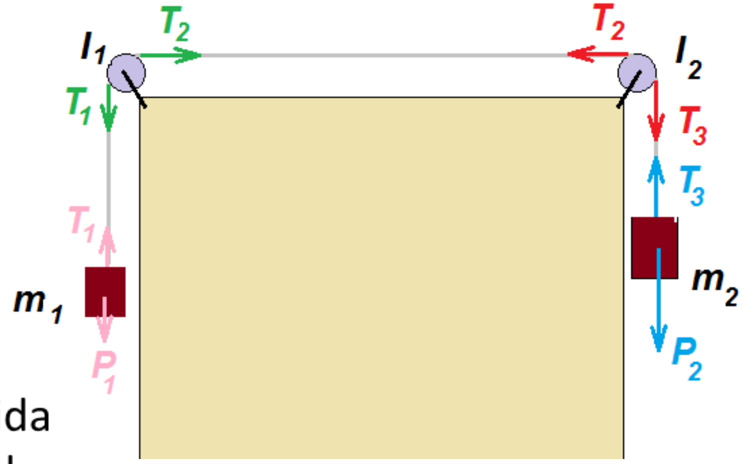
Ejemplo 8. Considere el sistema mostrado en la Figura, donde $m_2 > m_1$. Cada polea tiene masa *M* y radio *R*. Hallar la aceleración del sistema



Rta: Debemos considerar la traslación de las masas y la rotación de las poleas.

Dado que las poleas poseen masa, la tensión en la cuerda será distinta en cada uno de los tres segmentos.

Consideraremos como positiv@s a las fuerzas y torque que tienden a hacer mover al sistema en sentido antihorario, y negativ@s a las que lo hacen en contra.



Cuerpo 1: $\sum F_y$: $T_1 - m_1 g = m_1 a$

Polea 1: $\sum \tau$: $T_2 R - T_1 R = I_1 \alpha$

Polea 2: $\sum \tau$: $T_3 R - T_2 R = I_2 \alpha$

Cuerpo 2: $\sum F_y$: $m_2 g - T_3 = m_2 a$

Es un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (las T_i y la aceleración). Una forma rápida de eliminar las tensiones es sumar m. a m. las 4 ecuaciones (luego de pasar *R* dividiendo en las ecuaciones del torque). Además, $I_1 = I_2 = MR^2/2$ (ver tabla). Se obtiene:

$$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a + \frac{1}{2} M a + \frac{1}{2} M a \longrightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M} g$$

Conservación de la Energía en el Movimiento Rotacional

Teorema de Trabajo-Energía: El trabajo neto invertido por fuerzas externas sobre un objeto es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinética traslacional y rotacional:

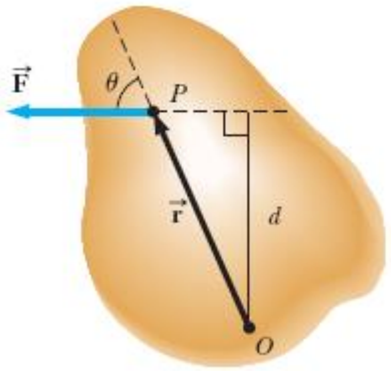
$$K = K_{tras} + K_{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$W_{neto} = \Delta K$$

O sea, el teorema sigue siendo válido, solamente que ahora deberemos incluir en la energía cinética un término rotacional

Equilibrio Estático

El equilibrio estático representa una situación común en la práctica ingenieril, y los principios que involucra son de especial interés para ingenieros civiles, arquitectos e ingenieros mecánicos.



Condiciones de equilibrio

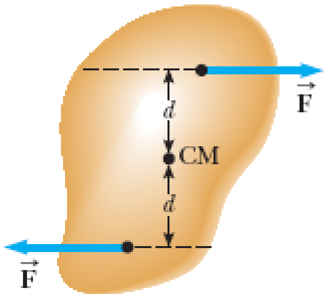
1. Equilibrio Traslacional La fuerza externa neta sobre el objeto debe ser igual a cero: $\sum \vec{F} = 0$

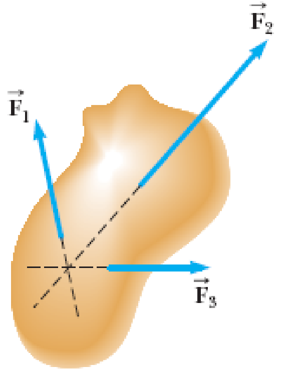
2. Equilibrio Rotacional El momento de torsión externo neto sobre el objeto alrededor de *cualquier* eje debe ser cero: $\sum \vec{\tau} = 0$

(si un objeto está en equilibrio traslacional y el momento de torsión neto es cero en torno a un eje, el momento de torsión neto debe ser cero en torno a cualquier otro eje)

¿Cuántas condiciones son? En 3-D son 6 condiciones: $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0; \sum \tau_x = 0; \sum \tau_y = 0; \sum \tau_z = 0;$

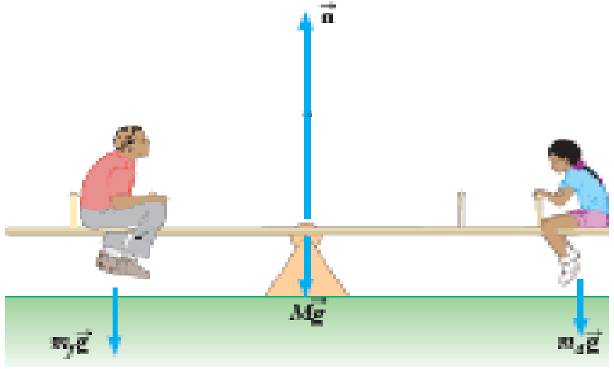
En 2-D son tres condiciones: $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum \tau_z = 0;$



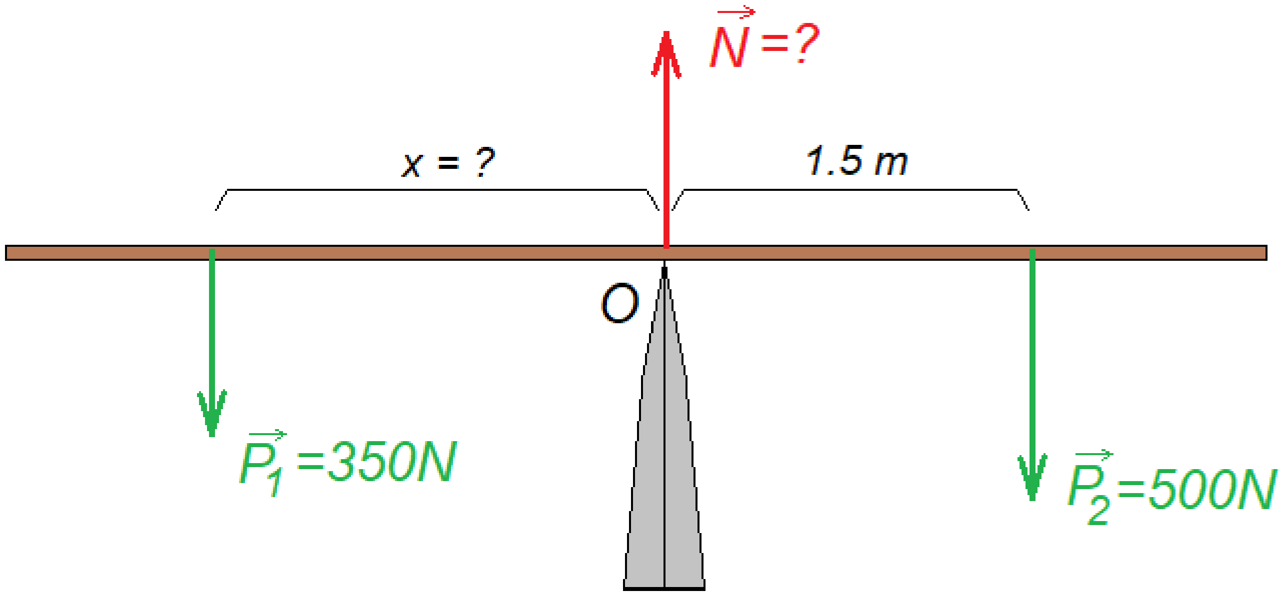


Equilibrio Estático - Ejemplos

Ejemplo 9. Un tablón uniforme de 40 N de peso soporta a dos niños que pesan uno 500 N, y el otro 350 N. Si el soporte (punto de apoyo) está debajo del centro de masa del tablón, y si la niña de 500 N se encuentra a 1.50 m del centro. **(a)** Determine la fuerza hacia arriba ejercida por el soporte sobre el tablón. **(b)** Determine dónde debe sentarse el niño para equilibrar el sistema.



Rta. Dado que estamos analizando una situación de equilibrio estático, deben anularse la fuerza neta y el torque neto sobre el tablón. Consideremos como punto de giro el punto de apoyo *O* del tablón sobre el soporte:



(a)

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \sum F_y = 0$$

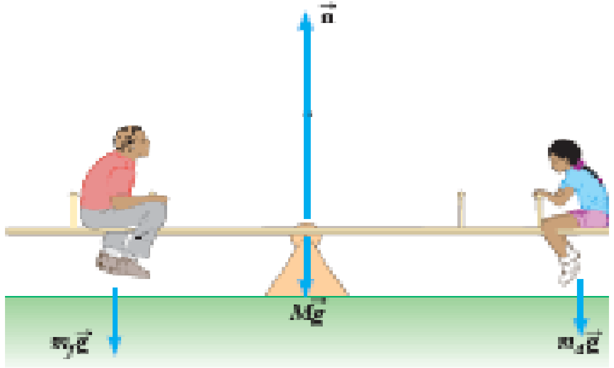
$$\downarrow$$

$$N - P_1 - P_2 = 0$$

$$\downarrow$$

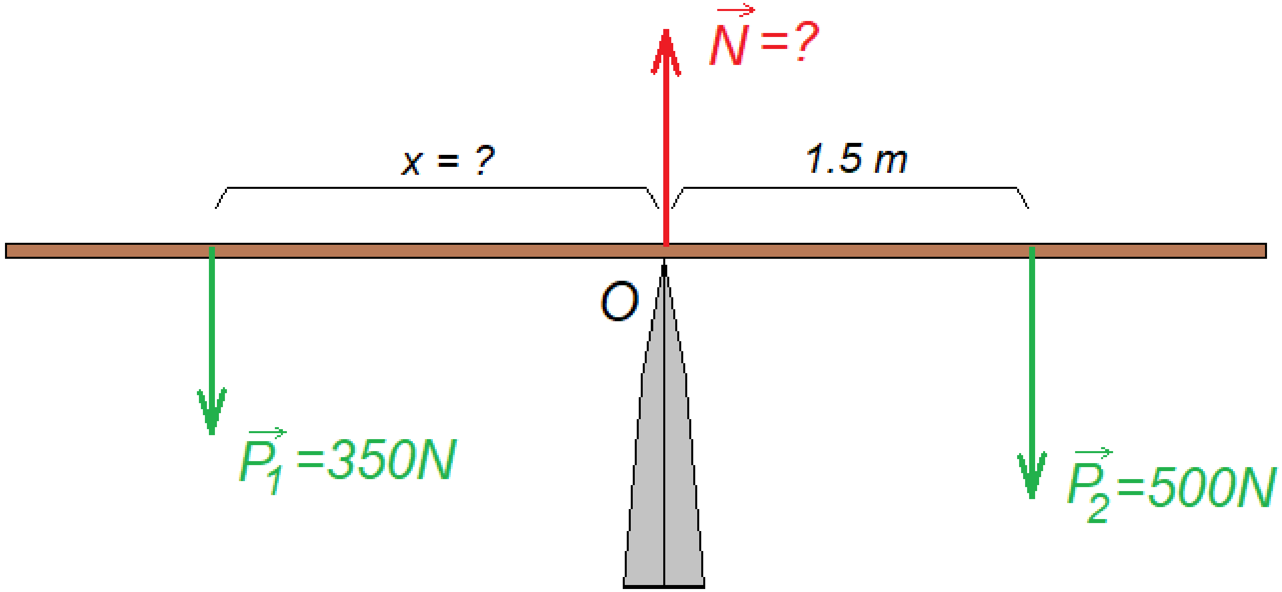
$$N = P_1 + P_2 = 850N$$

Equilibrio Estático - Ejemplos



Ejemplo 9. Un tablón uniforme de 40 N de peso soporta a dos niños que pesan uno 500 N, y el otro 350 N. Si el soporte (punto de apoyo) está debajo del centro de masa del tablón, y si la niña de 500 N se encuentra a 1.50 m del centro. **(a)** Determine la fuerza hacia arriba ejercida por el soporte sobre el tablón. **(b)** Determine dónde debe sentarse el niño para equilibrar el sistema.

Rta. Dado que estamos analizando una situación de equilibrio estático, deben anularse la fuerza neta y el torque neto sobre el tablón. Consideremos como punto de giro el punto de apoyo *O* del tablón sobre el soporte:



(b)

$$\sum \tau = 0$$

$$\downarrow$$

$$P_1 \cdot x - P_2 \cdot 1.5m = 0$$

$$\downarrow$$

$$350N \cdot x - 500N \cdot 1.5m = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{500N \cdot 1.5m}{350N} = 2.14m$$